Savoir-faire pour une préparer sa rentrée en ECG

Le gros point à travailler en ECG sera les lacunes de calculs des années du secondaire car la calculatrice n'est pas autorisée ni au concours, ni au cours de l'année. Il faudra aussi investir les formules (dérivées, primitives, logarithmes, etc...) pour une utilisation fluide et juste de ces dernières.
Enfin, le travail de rédaction sera très important, les points au concours se gagnent et se perdent au niveau de la rédaction : elle nécessite d'être rigoureuse, juste, mais aussi simple et élégante.
Voici donc quelques exercices pour vérifier vos connaissances, votre capacité de calcul et de rédaction.

Calculs élémentaires

Fractions

Attention à la manipulation des fractions pour ne pas écrire d'énormité. On s'attachera notamment toujours à s'assurer que le dénominateur d'une fraction ne peut pas être nul. Vous devez savoir simplifier, additionner, multiplier et diviser des fractions. Ces exercices ne sont que quelques exemples, vous pouvez en imaginer plusieurs autres sur ce modèle.
Dans ce qui suit, x,y,z sont des réels, tels que les dénominateurs des fractions dans lesquels ils apparaissent ne s'annulent pas.

- Simplifier $\dfrac{x^2+xy}{xz}$ (on commencera par factoriser le numérateur. Ici l'erreur classique est de simplifier trop rapidement et de faire un calcul faux).
- Simplifier $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}$ (très simple, mais assurez vous de ne pas écrire n'importe quoi.)
- Exprimer sous forme d'une fraction simplifiée $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$ (comme la question précédente.)
- Exprimer sous forme d'une fraction simplifiée $\dfrac{24}{5}\times\dfrac{45}{16}$ (on simplifiera toujours au maximum les fractions).
- Simplifier $\dfrac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2}$.
- Exprimer sous forme d'une fraction simplifiée $\dfrac{3+\frac{4}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{9}}$.
- Exprimer sous forme d'une fraction factorisée $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$.

Puissances

Vous devez savoir manipuler les puissances entières positives et négatives (donc attention à la nullité éventuelle du dénominateur), et connaître les règles de calculs suivantes :

Pour x,y réels et n,m entiers , $x^ny^n=(xy)^n, (x^n)^m=x^{nm}, x^nx^m=x^{n+m}, x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}(x\neq 0)$

- Simplifier $\dfrac{(12\times 10)^2\times 14}{21^2\times 60^2}$ (On commencera par développer en facteurs simples).

- Simplifier $\dfrac{(9\times 5)^2+3^5}{12^4}$ (On commencera par mettre en facteur le numérateur).
- Simplifier $\dfrac{\sqrt{6^5\times 5^3}}{180}$ (On commencera par sortir les puissances paires de la racine carrée).
- Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to +x_0} f(x)\frac{\sqrt{x}}{x}$ (Attention au domaine de d'existence de la fraction).

Identités remarquables

Dans ce qui suit, x, y, z et t sont des réels.
Vous devez connaître vos trois identités remarquables :

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2,\quad (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2,\quad x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$

- Simplifier $(x-y)^2-(x+y)^2$
- Montrer que $2xy \leq x^2+y^2$ (on pourra partir d'une identité remarquable).
- Développer le plus simplement possible $(x+y)^3$, puis imaginer (et vérifier) ce que pourrait être le développement de $(x-y)^3$.

Inégalités et valeur absolue

Dans ce qui suit, x et y sont des réels.
On sera **très** vigilant dans la manipulation d'inégalités, il est particulièrement faux d'écrire :

$$x\leq y \text{ et } z\leq t \text{ donc } xz\leq yt$$

Tester cela avec $x=-2$, $y=-1$, $z=1$ et $t=4$!
Il faut aussi dès maintenant s'habituer à

$$|x|\leq y \Longleftrightarrow -y\leq x\leq y$$

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, $2<|x-1|<3$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$, $|x+2|+|x-5|=11$ (on pourra faire un tableau pour étudier l'équation selon différents cas).
- Que vaut $\sqrt{(x-1)^2}$? (pour quelles valeurs de x ?)

Calcul avec des polynômes

Il est important de s'habituer à mener des calculs de façon claire et simple, en évitant une succession de calculs longs et pénibles.

- Factoriser $P(x)=3x^3-6x^2+2x-4$.
- Simplifier $\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-10x+12}$ (parler de l'existence de la fraction !).
- Montrer que $P(x)=x^3-3x^2+6x+2$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ (on pourra faire une étude de fonction).

Vers la prépa ECG

Fonctions usuelles

Vous devez connaître les propriétés calculatoires des fonctions ln et exp.
- Simplifier $\ln(e^2)$.
- Résoudre $\ln(x+2) = 1$ (domaine d'éxistence des solutions ?).
- Simplifier $2\ln(\sqrt{3}) + 4\ln(9)$.
- Simplifier $\ln(-\sqrt{x} + e^{\ln(x+\sqrt{x})})$ (avez vous vérifier le domaine d'existence ?).
- Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{x^2+6} \leq e^{5x}$.
- Simplifier $\dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}}$.

Dérivablitié

Vous devez connaître vos dérivées de fonctions usuelles et savoir dériver somme, produit et quotient de fonctions.
Calculer les différentes dérivées après avoir donné leur domaine d'existence :
- $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$
- $g(x) = \dfrac{1}{(3x+4)^2}$
- $h(x) = \sqrt{3+4x^2}$
- $i(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
- $j(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

Intégrabilité

Vous devez connaître vos primitives de fonctions usuelles.
Calculer les différentes primitives après avoir donné leur domaine d'existence :
- $e(x) = 3x^4$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$
- $g(x) = \sqrt{x}$
- $h(x) = (2x+1)^3$
- $i(x) = e^{-kx}$ avec $k \in \mathbb{R}^*$
- $j(x) = (e^x)^2$
- $k(x) = \dfrac{1}{2x+3}$
- $l(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x)$ (on pourra reconnaître une forme $u' \times u$)