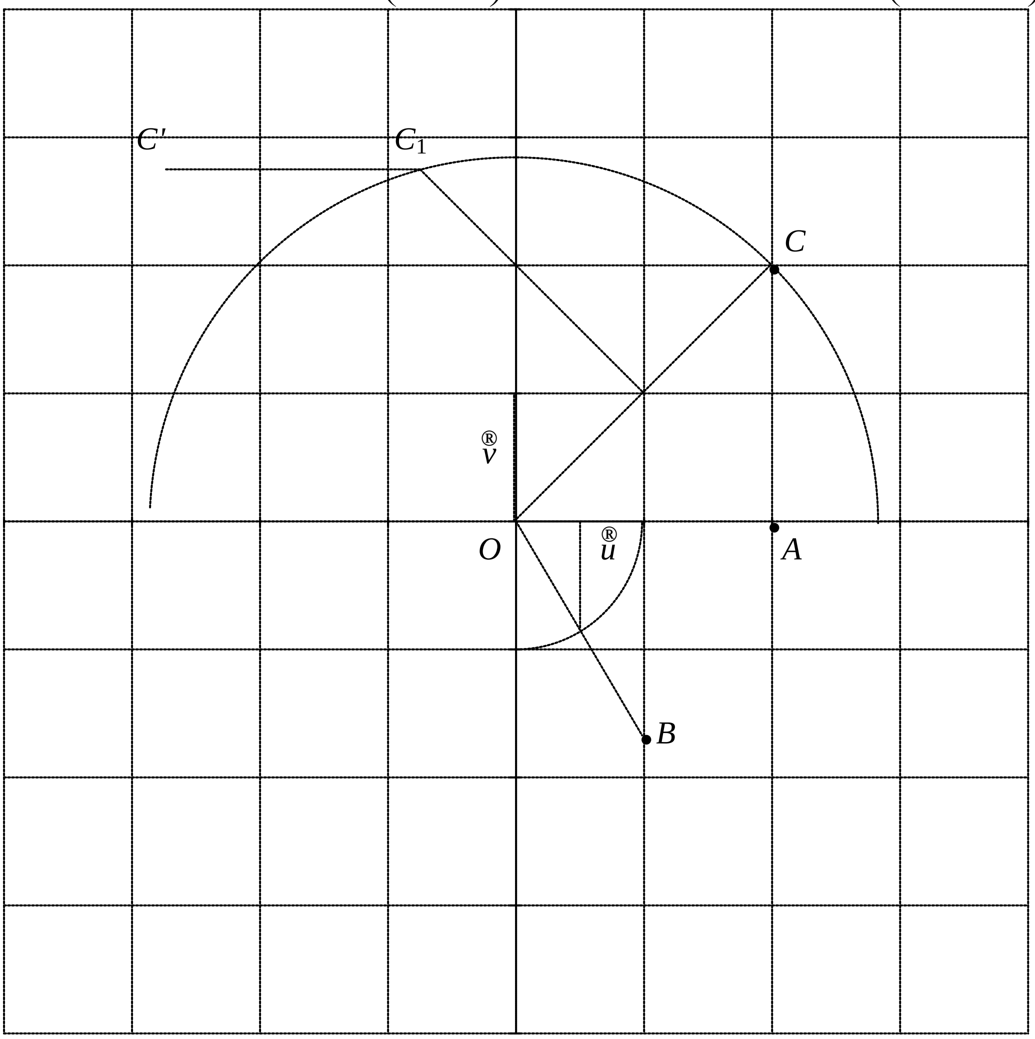
Correction du bac blanc de février 2004.

Exercice 1

1) a) $a = 2 = 2e^{i\theta}$ $\quad b = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ $\quad c = 2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

b)



2) a) Soit z_1 l'affixe du point M_1, l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, on a :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} z$$

Soit z' l'affixe du point M', l'image du point M par la translation de vecteur $-2\vec{u}$, on a

$$z' = z_1 - 2 = e^{i\frac{\pi}{3}} z - 2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z - 2$$

b) Comme C a pour affixe, $c = 2 + 2i$, C' a pour affixe :

$$c' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)c - 2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 + 2i) - 2 = 1 + i\sqrt{3} + i - \sqrt{3} - 2 = -\left(1 + \sqrt{3}\right) + i\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

c) $\frac{c'}{c} = \frac{-\left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)}{2 + 2i} \times \frac{2 - 2i}{2 - 2i} = \frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)(-1+i)(1-i)}{4+4} = \frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)2i}{4+4} = i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

d) $\arg\left(\frac{c'}{c}\right) = \arg\left(i\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ (2π) donc $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OC'}) = \frac{\pi}{2}$ (2π) et le triangle OCC' est rectangle en O.

$\left|\frac{c'}{c}\right| \neq 1$ donc $OC \neq OC'$ et le triangle n'est pas isocèle en O.

Comme le triangle est rectangle en O, son aire est $\frac{1}{2}OC \times OC' \times 4 = 2\sqrt{4+4}\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right) = 8\left(1+\sqrt{3}\right)$ cm²

e) Le point ayant O pour image par f est d'affixe z telle que $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 2 = 0$ (l'affixe de l'image est nulle), c'est-à-dire :

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = 2 \quad \text{puis} \quad z = \frac{2}{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}} = b.$$

Le point B est le point qui a pour image O par f.

3) a) $$\frac{z'}{z} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - 2}{z} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x + iy) - 2}{x + iy} = \frac{(\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x + iy) - 2)(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)}$$

$$= \frac{1}{x^2 + y^2}\left[(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2x) + i(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}y^2 + 2y)\right] = \frac{1}{2(x^2 + y^2)}\left[(x^2 + y^2 - 4x) + i(\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}y^2 + 4y)\right]$$

dont la partie réelle est $\frac{x^2 + y^2 - 4x}{2(x^2 + y^2)}$ $(z \neq 0)$.

b) Soit M un point distinct de l'origine, OMM' est rectangle en O lorsque l'argument de $\frac{z'}{z}$ est égal à $\frac{\pi}{2}$ modulo π dont que $\frac{z'}{z}$ soit imaginaire pur, c'est-à-dire que la partie réelle soit nulle :

$$\frac{x^2 + y^2 - 4x}{2(x^2 + y^2)} = 0 \text{ pour } z \neq 0 \text{ lorsque } x^2 + y^2 - 4x = 0$$

soit encore $(x - 2)^2 + y^2 - 4 = 0$ et $z \neq 0$

$(x - 2)^2 + y^2 = 2^2$ et $z \neq 0$

Pour que le triangle OMM' existe, il faut également que $M \neq O$ et que $M' \neq O$. $M \neq O$ est vérifié car $z \neq 0$ et $M' \neq O$ sera vérifié lorsque $M \neq B$ (d'après 2) e)) soit lorsque $z \neq b$.

L'ensemble recherché est donc le cercle de centre le point A (de coordonnées (2,0)) et de rayon 2 privé du point O et du point B.

Exercice 2

1) $u_0 = 0$

$u_1 = \frac{1}{4}$

$u_2 = \frac{3\times\frac{1}{4} + 1}{4} = \frac{7}{16}$

$u_3 = \frac{3\times\frac{7}{16} + 1}{4} = \frac{37}{64}$

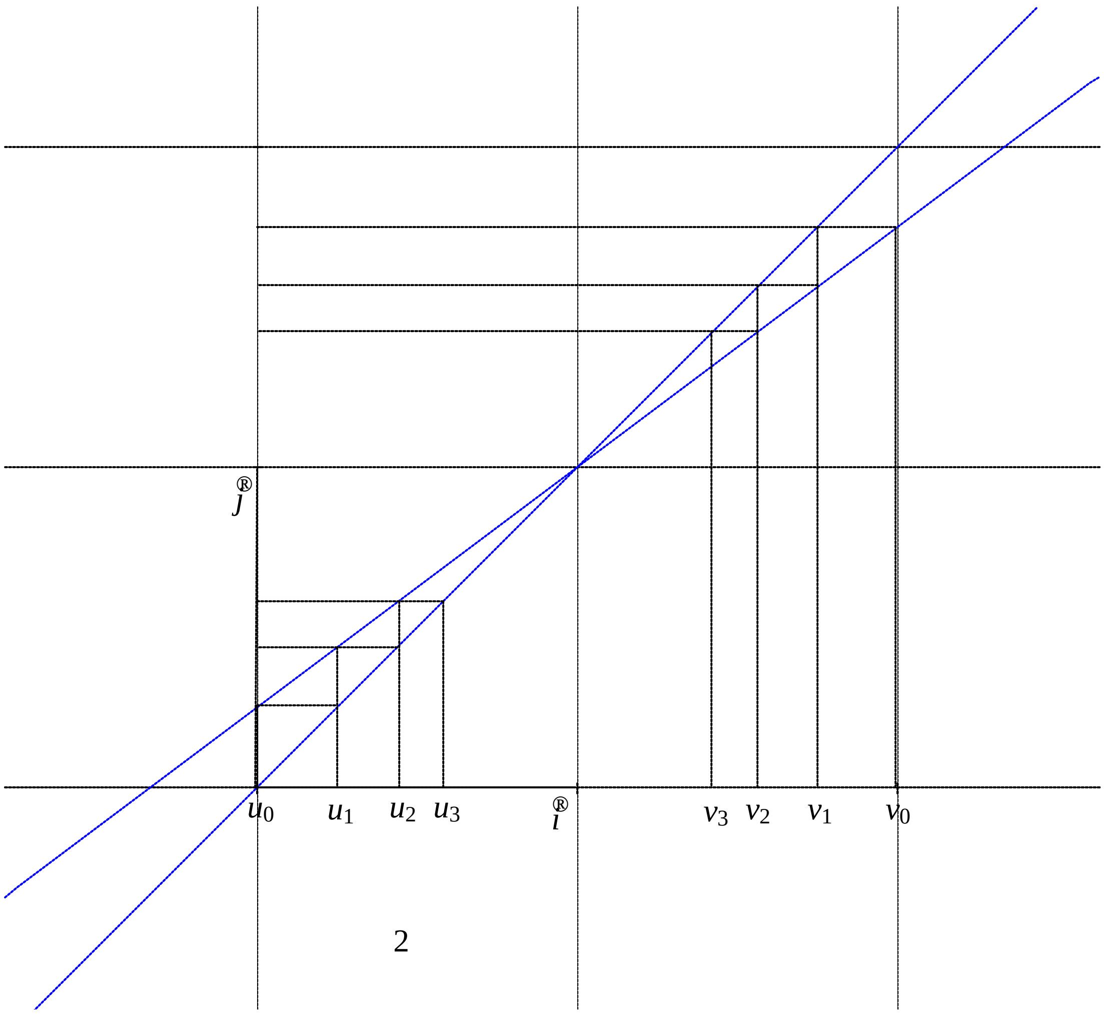
$v_0 = 2$

$v_1 = \frac{3\times2+1}{4} = \frac{7}{4}$

$v_2 = \frac{3\times\frac{7}{4} + 1}{4} = \frac{25}{16}$

$v_3 = \frac{3\times\frac{25}{16} + 1}{4} = \frac{91}{64}$

2) ci-contre



3) a) $s_0 = u_0 + v_0 = 0 + 2 = 2$

$s_1 = u_1 + v_1 = \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = 2$

$s_2 = u_2 + v_2 = \frac{7}{16} + \frac{25}{16} = \frac{32}{16} = 2$

$s_3 = u_3 + v_3 = \frac{37}{64} + \frac{91}{64} = \frac{128}{64} = 2$

Il semble, après ces calculs que la suite (s_n) soit constante.

b) La propriété est vraie pour $n \in \{0;1;2;3\}$ d'après le 3).

Supposons la propriété vraie à un rang $p \geqslant 0$, $s_p = 2$.

$$s_{p+1} = u_{p+1} + v_{p+1} = \frac{3u_p + 1}{4} + \frac{3v_p + 1}{4} = \frac{3(u_p + v_p) + 2}{4} = \frac{8}{4} = 2,$$

et la propriété est encore vraie au rang $p + 1$.

D'après le raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

4) soit $n \geqslant 0$,

a) $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{v_n - u_n} = \frac{\frac{3v_n + 1}{4} - \frac{3u_n + 1}{4}}{v_n - u_n} = \frac{3(v_n - u_n)}{4(v_n - u_n)} = \frac{3}{4}$ et la suite (d_n) est une suite géométrique.

b) On peut alors écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = d_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

5) on a, pour tout n, $\begin{cases} v_n - u_n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ u_n + v_n = 2 \end{cases}$

La somme des deux lignes permet de trouver :

$$2v_n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 2 \text{ puis } v_n = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

La différence de la seconde ligne par la première permet d'écrire :

$$2u_n = 2 - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ puis } u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

6) Comme $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \lim\limits_{n \to \infty} v_n = 1$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et de limite 1.

Exercice 3

1) On a $f(x) = (2 + \cos(x))e^{1-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$

et $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ donc $2 + \cos(x) \geqslant 1$ donc $2 + \cos(x) > 0$

donc, par produit, $f(x) > 0$

2) a) $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}[\cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)]$

$= \sqrt{2}.\left[\cos(x)\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(x)\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$= \cos(x) + \sin(x)$

Comme $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant -\sqrt{2}$ alors $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2 = \cos(x) + \sin(x) + 2 \geqslant -\sqrt{2} + 2$

donc $\cos(x) + \sin(x) + 2 > 0$

b) $f'(x) = -\sin(x)e^{1-x} + (2 + \cos(x))(-1)e^{1-x}$

$= -(2 + \cos(x) + \sin(x))\, e^{1-x}$

Comme $2 + \cos(x) + \sin(x) > 0$ d'après 2) a) et que $e^{1-x} > 0$ car une exponentielle est toujours strictement positive, $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3) a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$

donc $1 \leqslant 2 + \cos(x) \leqslant 3$

puis $e^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3e^{1-x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} 3e^{1-x}$

Donc, par encadrement (ou encore théorème des gendarmes), $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc, puisque $f(x) \geqslant e^{1-x}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ par comparaison.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est asymptote horizontale à C au voisinage de $+\infty$.

4) a) $f(0) = (2 + \cos(0)\times e^1 = 3e > 3$

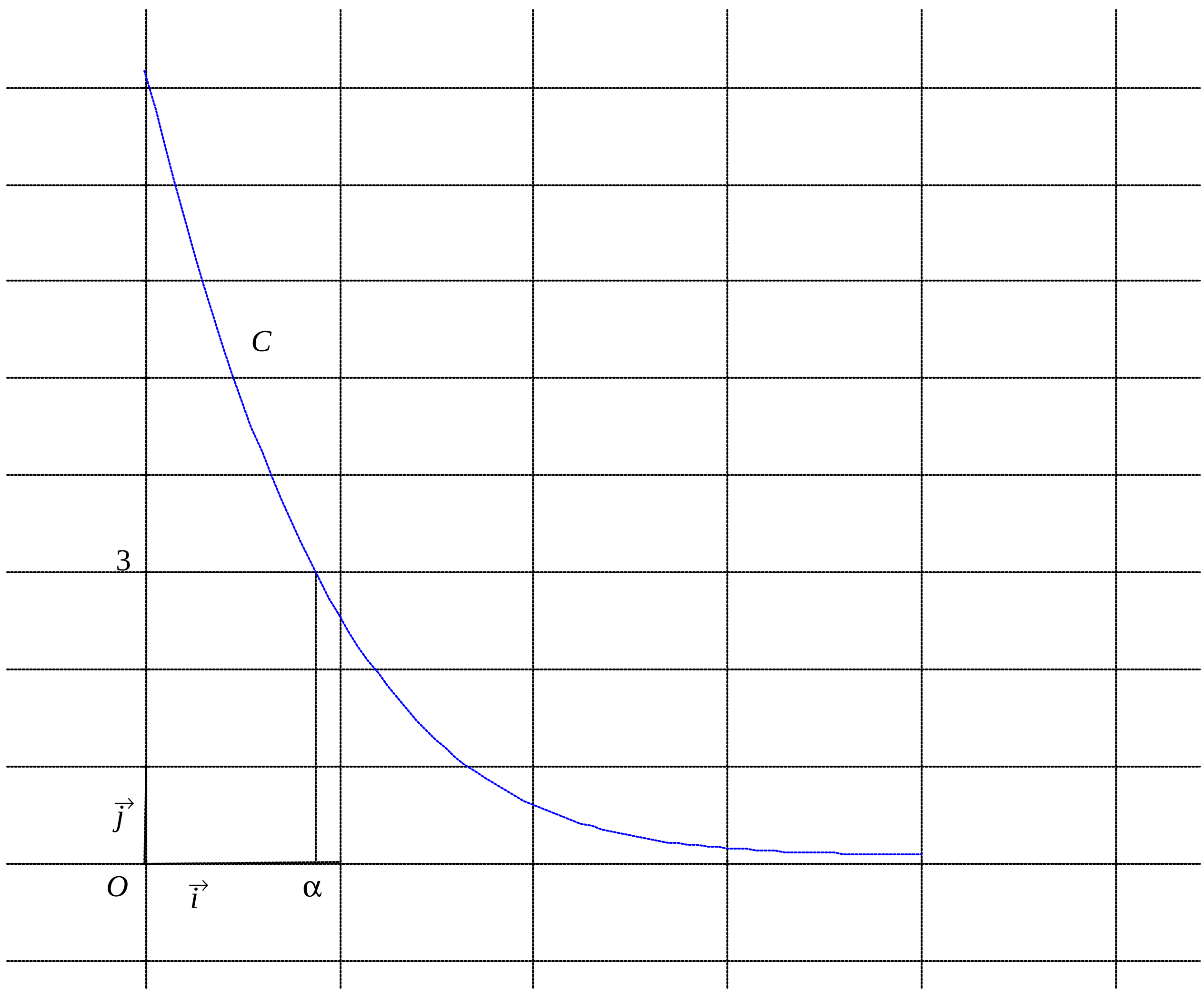
$f(\pi) = (2 + \cos(\pi))e^0 = 2 + \cos(\pi) = 1 < 3$

et f est une fonction strictement décroissante sur $[0;\pi[$ à valeur dans $]1;3e]$ qui contient 3.
On sait de plus que f est une fonction continue (comme produit de deux fonctions continues, la première étant la composée entre une fonction affine et la fonction cosinus, la seconde une composée entre la fonction exponentielle et une fonction affine).
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (TVI dans le cas d'une fonction monotone ou encore théorème de la bijection), il existe une unique solution $\alpha \in [0;\pi[$ à l'équation $f(x) = 3$
b) A l'aide la calculatrice (par une gestion de plus en plus fine du tableau de valeurs de la fonction, par exemple), on trouve $f(0{,}87) > 3$

$f(0{,}88) < 3$

ce qui permet d'écrire $0{,}87 < \alpha < 0{,}88$ qui est un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α

c)



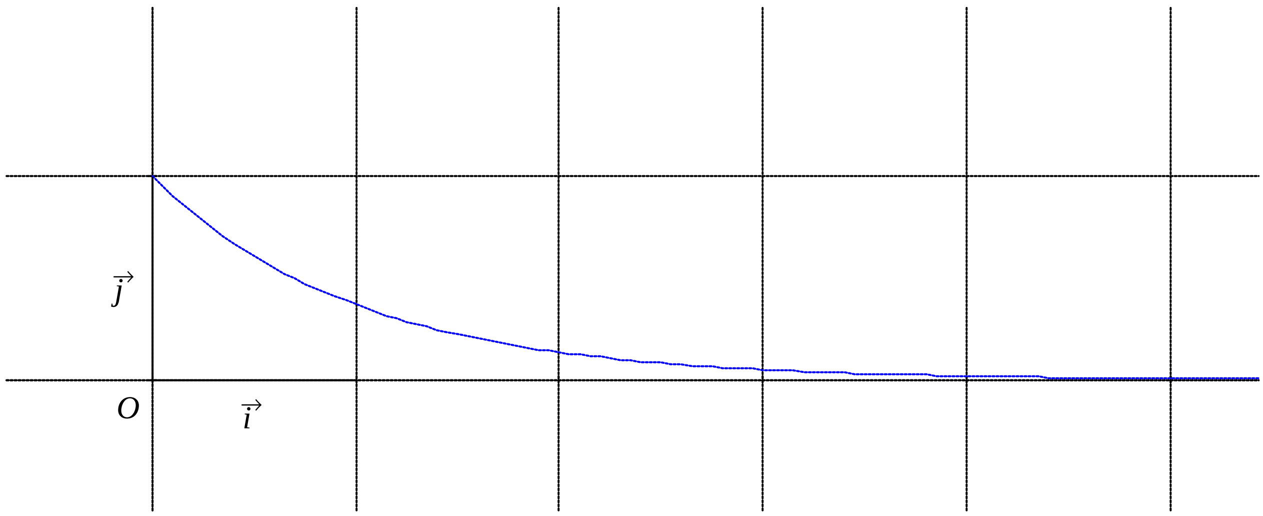
Exercice 4

Partie A

1) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = e^{-x}$

f est la composée de la fonction affine x ? $-x$ qui est continue, dérivable et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$ et à valeurs dans $]-\infty;0]$ suivie par la fonction exponentielle qui est continue, dérivable et strictement croissante sur $]-\infty;0]$.

f est donc continue, dérivable et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.



2) Nous savons déjà, d'après le 1), que la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

Or $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ donc f est à valeurs dans $]0;+\infty]$

Donc, puisque 0,7 se trouve dans l'intervalle image de la fonction f, il existe une unique solution λ, $\lambda \in [0;+\infty[$, à l'équation $f(x) = 0{,}7$.

A l'aide de la calculatrice, on trouve $\lambda \approx 0{,}3567$ à 10^{-4} près.

Une autre méthode consisterait à utiliser la bijection réciproque de la fonction exponentielle, c'est-à-dire la fonction ln, on a $\lambda = -\ln(0{,}7)$ et il suffit d'en donner une valeur approchée à 10^{-4} près.

Partie B

1) Q représente les fonctions solutions de l'équation différentielle $Q'(t) = -\lambda Q(t)$, ces solutions sont de la forme $Q(t) = ke^{-\lambda t}$.

Or $Q(0) = 1{,}8$ (injection à $t = 0$ h) donc $ke^{-\lambda 0} = k = 1{,}8$ et la solution est $Q(t) = 1{,}8e^{-\lambda t}$.

Si au bout d'une heure la quantité a diminué de 30%, on a :

$$Q(1) = \frac{70}{100}Q(0) \qquad \text{soit} \qquad 1{,}8e^{-\lambda\times 1} = 0{,}7\times 1{,}8e^{-\lambda\times 0}$$

Soit encore $e^{-\lambda} = 0{,}7$ qui est une équation recherchée

Ce qui suit n'était pas demandé :

Puis $-\lambda = \ln(0{,}7)$ (propriété de la fonction exponentielle qui est strictement croissante et continue dont on connaît une solution exacte à l'équation $e^x = y$ ou par l'application de la fonction ln à l'équation)

finalement $\lambda = -\ln(0{,}7)$

2) a) R_{n+1} est la quantité présente à l'instant $n + 1$, il s'agit de la quantité présente à l'instant n, R_n, qui a diminuée de 30% à laquelle on a associé une injection de 1,8. On trouve : $R_{n+1} = 0{,}7R_n + 1{,}8$.

b) Montrons par récurrence la propriété demandée :

- Pour $n = 0$, on a $R_0 = 1{,}8$ et $6(1 - 0{,}7^{0+1}) = 6\times 0{,}3 = 1{,}8$ et la propriété est vérifiée pour $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie à un rang n, $n \geqslant 0$: $R_n = 6(1 - 0{,}7^{n+1})$

  $6(1 - 0{,}7^{n+2}) = 6(1 - 0{,}7\times 0{,}7^{n+1}) = 0{,}7\times 6(1 - 0{,}7^{n+1}) - 0{,}7\times 6 + 6 = 0{,}7R_n + 1{,}8 = R_{n+1}$

  et la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.

D'après le raisonnement par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) $-1 < 0{,}7 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} 0{,}7^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = 6$.

Exercice 4 Spécialité

1) a) Les restes de la division euclidienne de 3^n par 7 sont, pour $n \in \{1;2;\ldots;6\}$:

Si $n = 1$, $3^1 = 3$ et le reste est 3
Si $n = 2$, $3^2 = 9$ et le reste est 2
Si $n = 3$, $3^3 = 27 = 21 + 6$ et le reste est 6
Si $n = 4$, $3^4 = 81 = 77 + 4$ et le reste est 4
Si $n = 5$, $3^5 = 243 = 238 + 5$ et le reste est 5
Si $n = 6$, $3^6 = 729 = 728 + 1$ et le reste est 1

b) On a, pour tout $n \geqslant 0$, $3^{n+6} - 3^n = 3^n(3^6 - 1) = 3^n \times 728 = 3^n \times 7 \times 104$ qui est divisible par 7.

On peut écrire $3^n \equiv r_1$ [7] où $0 \leqslant r_1 \leqslant 6$ (r_1 est le reste dans la division euclidienne de 3^n par 7)
et $3^{n+6} \equiv r_2$ [7] où $0 \leqslant r_2 \leqslant 6$ (r_2 est le reste dans la division euclidienne de 3^{n+6} par 7)

Donc $3^{n+6} - 3^n \equiv r_2 - r_1$ [7]
$0 \equiv r_2 - r_1$ [7] car $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7 donc $r_2 - r_1$ est divisible par 7.

Or r_1 et r_2 se trouvent dans $\{0;1;\ldots;6\}$ donc $-6 \leqslant r_2 - r_1 \leqslant 6$ et la seule valeur divisible par 7 dans cet intervalle est 0. Donc $r_2 - r_1 = 0$ soit $r_1 = r_2$; 3^{n+6} et 3^n ont même reste dans la division euclidienne par 7.

c) On a, d'après le b), $3^{1000} \equiv 3^{1000-6} \equiv 3^{1000 - 2\times 6} \equiv \ldots \equiv 3^{1000 - 6\times 166} \equiv 3^4$ [7]

Or 3^4 a pour reste 4 dans la division euclidienne par 7 d'après le 1) a).

Le reste dans la division euclidienne de 3^{1000} par 7 est 4.

d) En reprenant la méthode du c), le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 va s'obtenir en enlevant autant de fois que nécessaire 6 à n pour trouver un entier entre 0 et 6 (c'est-à-dire obtenir le reste dans la division euclidienne de n par 6 et dans le cas particulier du reste nul, prendre l'entier 6) et appliquer les restes trouvés dans le 1) a).

e) Comme tous les restes dans la division euclidienne de 3^n par 7 sont 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 en reprenant la méthode du d), ce reste n'est jamais nul et 3^n n'est pas divisible par 7, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Si $U_n = 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = \dfrac{1 - 3^n}{1 - 3} = \dfrac{1}{2} \times (3^n - 1)$ (somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 3) est divisible par 7 alors $2 \times U_n$ est divisible par 7 puis $3^n - 1 = 2 \times U_n$ est divisible par l'entier 7

b) Si $3^n - 1$ est divisible par 7 alors $2 \times U_n$ est divisible par 7
puis U_n est divisible par 7 puisque 2 ne l'est pas et que 7 est premier avec 2
(théorème de Gauss).

D'après les deux résultats précédents, U_n est divisible par 7 si, et seulement si, $3^n - 1$ est divisible par 7
Ce dernier résultat est vérifié si, et seulement si, 3^n a pour reste 1 dans la division euclidienne par 7 ce qui est vérifié, d'après la méthode expliquée dans le 1) e) lorsque n est de la forme $6 + 6 \times k$, $k \in \mathbb{Z}$ c'est-à-dire de la forme $6 \times k$, $k \in \mathbb{Z}$ donc s'il est multiple de 6.