Pour bien préparer la rentrée en MPSI/PCSI

Félicitations pour avoir été admis en MPSI/PCSI au Lycée Pierre Corneille.

Afin de bien préparer la rentrée, votre priorité doit être de renforcer vos acquis de terminale S, en particulier au niveau du calcul. Cette étape est fondamentale, bien plus importante que d'essayer d'assimiler des notions nouvelles : nous avons l'année pour cela.

Votre aisance calculatoire sera en effet l'une des clefs de votre réussite dans les différentes matières scientifiques : Mathématiques, Physique, Chimie, Sciences de l'Ingénieur et Informatique. Il faudra calculer de manière efficace et sûre. Cela passe par l'entraînement. Dans cette optique nous vous proposons une liste d'exercices de calculs. Ces exercices sont de niveaux variables. Certains de ces exercices seront repris et approfondis lors des premiers cours.

Nous vous encourageons vivement à travailler ces exercices afin d'être prêt pour la rentrée. L'entraînement n'est pas fait pour s'épuiser mais pour garder la forme. Il serait ridicule d'essayer de faire tous ces exercices juste avant la rentrée. Au contraire, vous devez organiser votre travail sur plusieurs semaines afin de pouvoir localiser vos éventuelles lacunes et avoir le temps d'y remédier. Enfin ces exercices abordent différents thèmes, vous pouvez les traiter dans le désordre.

Attention cependant à l'utilisation de la calculatrice: ce ne doit pas être un réflexe. La calculatrice sera d'ailleurs interdite pour la plupart des épreuves de Mathématiques. Tout simplement parce que c'est le cas dans la plupart des concours !

Pour vous accompagner dans ce travail, des rappels de cours, des indications et certains éléments de réponses sont fournis dans l'énoncé. Un corrigé sera mis en ligne sur le site du lycée début Août, ces réponses ne devant pas être lues avant de chercher à répondre à la question, cela induirait un biais dans la démarche calculatoire.

Bon courage et bonnes vacances.

Exercice 1 Sans calculatrice, calculer et mettre sous forme de fraction simplifée :

1) $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}}$,

2) $\dfrac{2-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}}{6-2\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}\right)}$,

3) $\left(1-\frac{1}{6}\right)-\left(3-\frac{1}{2}\right)+\left(7-\frac{1}{3}\right)$ (à calculer de deux façons différentes),

4) $12\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+4\right)$,

5) $\left(1+\frac{1}{4}\right)-2\left(\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)$,

6) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{1}{3}+1\right)$,

7) $1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$.

Rappels de cours - Produits remarquables .
Pour tous réels x et y.

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \qquad (x-y)^2=x^2-2xy+y^2 \qquad (x-y)(x+y)=x^2-y^2.$$

Exercice 2 Développer et ordonner les résultats :

1) $P_1(x)=(4x-7x^2)(x^3-8x+7)$,
2) $P_2(x)=(2x^3+x+1)(4x^2-x+5)$,
3) $P_3(x)=(x^3-x+2x^2+1)^2$,
4) $P_4(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$,
5) $P_5(x)=(x-1)(x^2+x+1)$,
6) $P_6(x)=(x-1)(x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1)$.

Exercice 3 Factoriser :

1) $P_1(x)=4x^2+4x+1$,
2) $P_2(x)=x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$,
3) $P_3(x)=(2x+1)^2-25(3x+2)^2$,
4) $P_4(x)=(x^2+8x+4)^2-(x^2+4)^2$,
5) $P_5(x)=x^4-4x^2+4$,
6) $P_6(x)=(x-2)^4+(x^2-4)^2$.

Indication : reconnaître des produits remarquables

Corrigé $P_1(x) = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = (2x+1)^2$

Exercice 4 Factoriser le numérateur et le dénominateur et simplifier la fraction :

1) $F_1(x) = \dfrac{x^2+10x+25}{x^3+5x^2}$,

2) $F_2(x) = \dfrac{x^2}{2x^2+x}$,

3) $F_3(x) = \dfrac{x^3-x}{x+1}$,

4) $F_4(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1}$,

5) $F_5(x) = \dfrac{x^5-4x^3}{(x^2+1)^2-1}$

6) $F_6(x) = \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4}$

Corrigé $F_1(x) = \dfrac{(x+5)^2}{x^2(x+5)} = \dfrac{(x+5)}{x^2}$

Exercice 5 Simplifier :

1) $F_1(x) = \dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{1}{x(x^2-1)}$,

2) $F_2(x) = 2 + \dfrac{3}{x} + \dfrac{x-1}{3x} - \dfrac{x+7}{6x}$,

3) $F_3(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x^2-1}$,

4) $F_4(x) = \dfrac{2x^2}{x+1} + \dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x} + \dfrac{1}{x}$,

5) $F_5(x) = \dfrac{x(x-1)^2}{2(2x-1)} + \dfrac{x}{2} - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.

On réduira au même dénominateur en cherchant un dénominateur commun "optimal" (plus petit commun multiple), par exemple pour 1) on prendra $x(x^2-1)$ comme dénominateur commun et non pas $x(x^2-1)^2$

Exercice 6

1) Montrer que pour tout $x \in [2,4]$, $\dfrac{5}{18} \leqslant \dfrac{x^2+1}{x^2+x-2} \leqslant \dfrac{17}{4}$.

2) Sur le même modèle, proposer un encadrement des quantités suivantes.

-a- $\dfrac{x+2-\cos x}{x^2+1}$ pour tout $x \in [0,12]$,

-b- $\dfrac{3x^2-2x+3}{\sqrt{x+1}+2x+7}$ pour tout $x \in [-1,1]$.

Corrigé 1) Soit $x \in [2,4]$.
On encadre le numérateur. On a $2 \leqslant x \leqslant 4$ et la fonction $t \mapsto t^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $4 \leqslant x^2 \leqslant 16$, on déduit

$$5 \leqslant x^2 + 1 \leqslant 17 \quad (*).$$

On encadre le dénominateur. On somme les encadrements

$$2 \leqslant x \leqslant 4 \qquad\qquad 4 \leqslant x^2 \leqslant 16.$$

et on ajoute -2 membre à membre, pour obtenir

$$4 \leqslant x^2 + x - 2 \leqslant 18.$$

On inverse le dénominateur et on le multiplie au premier encadrement. Puis comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il découle:

$$\frac{1}{18} \leqslant \frac{1}{x^2+x-2} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Les quantités présentes dans cet encadrement ainsi que celle de $(*)$ sont strictement positives, on peut donc multiplier ces encadrements, pour obtenir

$$\frac{5}{18} \leqslant \frac{x^2+1}{x^2+x-2} \leqslant \frac{17}{4}.$$

Remarque méthode: il s'agit de la manière la plus simple d'encadrer un quotient de réels positifs: on majore en majorant le numérateur et en minorant le dénominateur et on minore en minorant le numérateur et en majorant le dénominateur.
Attention aux signes: $-2 < -1$ *et* $1 < 10$ *mais* $-2 \times 1 > -1 \times 10$.

Exercice 7

1) Développer $\left(\sqrt{5}+1\right)^2$, $\left(\sqrt{5}-1\right)^2$ et $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$.

2) Compléter

-a- $7+2\sqrt{7}+\cdots=(\cdots+1)^2$,

-b- $3+4\sqrt{3}+\cdots=\left(\sqrt{3}+\cdots\right)^2$,

-c- $\cdots-6\sqrt{5}+9=(\cdots-\cdots)^2$.

3) En s'inpirant de ce qui précède, mettre sous forme d'un carré $3+2\sqrt{2}$ et $5+2\sqrt{6}$.

Exercice 8 Écrire aussi simplement que possible (en particulier on rendra rationnels les dénominateurs) :

1) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$,

2) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$,

3) $\dfrac{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{\sqrt{6}+1}$,

4) $\left(\sqrt{3\sqrt{3}}\right)^4$,

5) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$

6) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$

7) $\sqrt{(x-1)^2}$,

8) $\left(\sqrt{2}+3\right)^2-\left(\sqrt{2}-3\right)^2$,

9) $\left(\sqrt{2}+3\right)^2+\left(\sqrt{2}-3\right)^2$,

10) $\left(\sqrt{2}-3\right)^3\times\left(\sqrt{2}+3\right)^3$.

Corrigé 1) On multiplie le dénominateur et le numérateur de la fraction par $2+\sqrt{3}$ (appelée **expression conjuguée** de $2-\sqrt{3}$)

$$\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{4+4\sqrt{3}+3}{4-3}=7+4\sqrt{3}$$

On utilisera la même technique utilisant l'**expression conjuguée** pour 2), 3), 4).

Exercice 9 Vérifier les égalités suivantes :

1) $\sqrt{8}\left(\sqrt{8}-\sqrt{50}\right)=\sqrt{18}\left(\sqrt{18}-\sqrt{50}\right)$,

2) $4\sqrt{27}-3\sqrt{75}+2\sqrt{12}=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{2-\sqrt{3}}$,

3) $\sqrt{5+\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{7}}=\sqrt{10-6\sqrt{2}}$.

On utilisera, entre autres, des simplifications des racines carrées pour 1) et 2).
Pour 3), on utilisera que si a *et* b *sont des réels de même signe vérifiant* $a^2=b^2$ *alors* $a=b$.

Corrigé 1) Utiliser $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{50}=\ldots$

Rappels de cours - Propriétés calculatoires sur les puissances .
Soient x et y des réels non nuls et p et q des entiers relatifs.

$$x^p\times x^q=x^{p+q}\qquad (x^p)^q=x^{pq}\qquad (xy)^p=x^py^p.$$

$$x^{-p}=\frac{1}{x^p}\qquad \frac{x^p}{x^q}=x^{p-q}\qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n=\frac{x^n}{y^n}.$$

Exercice 10 Simplifier :

1) $\dfrac{4^{-2}\times 8^3}{16^2}$,

2) $81^5 \times \left(3^{-2}\right)^{-5} \times \dfrac{1}{9}$,

3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{12} \times \left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}$,

4) $\dfrac{a^8}{\left(a^2b^3\right)^5}$,

5) $\dfrac{\left(a^2b\right)^3}{a^{-3}(-b)^2}$,

6) $\dfrac{a^4b^{-5}}{a^2 \times \dfrac{b^3}{a^{-3}b}}$.

Pour 1), 2), 3) écrire le résultat sous forme 2^p3^q; pour 4), 5), 6) écrire le résultat sous forme a^pb^q

Exercice 11 Simplifier, le plus possible, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les expressions suivantes :

1) $\dfrac{a^{n^2}}{a^n}$,

2) $(a^n)^3 \times (a^3)^n$,

3) $(a^n)^n - a^{n^2}$,

4) $5^{n+2}-5^{n+1}+12\times 5^n-6\times 5^{n-1}$,

5) $\dfrac{32\times 8^{n-1}}{2^{2n+2}-4^n}$,

6) $\dfrac{5^n \times 12^{2n}}{10^n \times 6^{4n}}$,

7) $\dfrac{16^{n+1}+(-4)^{2n+1}+(-2)^{4n}}{8^n}$.

Exercice 12. Mathématiques pour les sciences physiques

Le taux d'avancement α et la constante d'équilibre K^o sont des réels positifs tels que $K^o = \left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha}\right)^2$ où $\alpha \in]0,1[$

Établir l'expression de α en fonction de K^o.

Rappels de cours - Propriétés de $\ln$ **et** $\exp$.

Soient a et b réels et n entier relatif:

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\,\mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{-a} = \frac{1}{\mathrm{e}^a}.$$

Soient a et b réels strictement positifs et n entier relatif:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b \qquad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a \qquad \ln(a^n) = n\ln a.$$

Exercice 13 Calculer en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$:

1) $\ln\left(\dfrac{81}{4}\right)$,

2) $\ln\left(\dfrac{225}{162}\right)$,

3) $\ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{1}{3} + \ln\dfrac{1}{5}$,

4) $\ln\left(15^3\right) - \ln 100$,

5) $\ln 1024$,

6) $\ln(0.002)$,

7) $\ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \cdots + \ln\dfrac{98}{99} + \ln\dfrac{99}{100}$.

Exercice 14 Simplifier les expressions suivantes :

1) $e^{2x}\times e^{1-2x}$,

2) $\dfrac{e^{2x+4}}{e^{x+1}}$,

3) $e^{-2x} - \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}$,

4) $4\ln\dfrac{a}{b} - 3\ln a + 5\ln b$,

5) $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)^3 - \ln\sqrt{ab}$.

Exercice 15 Simplifier :

1) $e^{2\ln 3}$,

2) $e^{-2\ln 3}$,

3) $e^{-\ln 5+2\ln 3}$,

4) $\ln \dfrac{e^5}{\sqrt{e^3}}$,

5) $\ln e^{-\ln 3}$,

6) $\ln\left(\left(e^{\ln \frac{1}{3}}\right)^2\right)$,

7) $e^{-\ln(\ln 3)}$,

8) $\ln \sqrt{e^{\frac{1}{2}\ln 3}}$.

Exercice 16. Mathématiques pour les sciences physiques
Une solution acide de concentration $C_0 = 0.1 mol.L^{-1}$ a une concentration en ions $h = [H_3O^+]$ telle que $h = \sqrt{K_A C_0} \approx 10^{-2.9} mol.L^{-1}$.
Établir l'expression littérale du $pK_A = -\log(K_A)$ en fonction du pH défini par $pH = -\log(h)$ et $pC_0 = -\log(C_0)$ et effectuer l'application numérique.

Exercice 17. Mathématiques pour les sciences physiques
La constante de vitesse k d'une réaction chimique dépend T de la température T selon la relation:

$$k = A\,\mathrm{e}^{-\frac{E_a}{RT}}$$

où R, A et E_a sont des constantes réelles positives. Pour deux températures différentes T_1 et T_2. On a alors :

$$k_1 = A\,\mathrm{e}^{-\frac{E_a}{RT_1}} \qquad k_2 = A\,\mathrm{e}^{-\frac{E_a}{RT_2}}$$

Donner l'expression littérale de E_a en fonction de k_1, k_2, T_1, T_2 et R.

Indication : on commencera par simplifier le quotient $\dfrac{k_1}{k_2}$, puis on isolera E_a pour l'exprimer en fonction des autres grandeurs.

Exercice 18. Mathématiques pour les sciences physiques
On obtient l'inégalité suivante sur la concentration en ions hydroxyde: $[HO^-] < \sqrt{\dfrac{K_S}{c}}$ avec $[HO^-]$, K_S et c des réels positifs. Posons

$$pOH = -\log([HO^-]) \qquad pK_S = -\log(K_S) \qquad pc = -\log c \qquad pOH + pH = pK_e.$$

Établir l'inégalité vérifiée par pH en fonction de pK_e, pK_S et pc.

Exercice 19. **Pour la MPSI**
Déterminer le domaine de définition et simplifier $f : x \mapsto x \exp\left(\dfrac{1}{2}\left|\ln\left(x^2\right)\right|\right)$.

Même questions avec $g : x \mapsto x \exp\left(\dfrac{1}{2}\left|\ln\left(x^3\right)\right|\right)$.

Rappels de cours - Formules trigonométriques .
Soient a et b deux réels

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1.$$

Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b - \sin b \sin a.$$

Exercice 20 En remarquant que $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ calculer $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 21

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(2a)$ uniquement en fonction de $\cos(a)$. Puis uniquement en fonction de $\sin(a)$. *Ces formules devront être connues par coeur en prépa*

Exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\sin(a)$.

2) Soit $a \in \mathbb{R}$, exprimer $2\cos^2 a + 4\sin^2 a$ uniquement à l'aide de $\cos(2a)$. Même question avec $\cos^4 a - \sin^4 a$.

3) Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(a) \neq 0$ et $\sin(a) \neq 0$. Simplifier $\dfrac{\sin(2a)}{\sin(a)} - \dfrac{\cos(2a)}{\cos(a)}$.

Méthode - Comment rédiger une résolution d'équation ou inéquation .

1) On donne un nom à l'équation

2) On introduit, la variable inconnue dans l'ensemble sur lequel l'équation est définie, "soit $x \in$ ..." (si x est l'inconnue)

3) On raisonne par équivalences à l'aide du symbole $\Leftrightarrow$

4) On conclut en donnant l'ensemble-solution.

Exercice 22 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
Ramener à une égalité à 0, factoriser, puis utiliser le fait qu'un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.

1) $x(x+4) = (x+4)$

2) $4x^2 - 49 = 0$

3) $9x^3 - 25x = 0$

4) $(x+2)(2x+5) = x^2 - 4$

5) $(2x+1)^2 = 9(x-4)^2$

6) $(2x-3)(x+2)^2 = (2x-3)(3x-1)^2$

Corrigé 1) On applique la méthode exposée ci-dessus.
Posons (E) l'équation $x(x+4) = (x+4)$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow x(x+4) - (x+4) = 0\\ &\Leftrightarrow (x+4)(x-1) = 0\\ &\Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 1.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (E) \text{ est } \{-4, 1\}}$.

Exercice 23. Équations et inéquations du second degré
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations:

1) $x^2 - 3x - 5 = 0$

2) $x^2 - 6x + 9 = 0$

3) $3x^2 - 2x + 7 = 0$

4) $2x^2 - x - 3 \geqslant 0$

5) $x^2 - 5x + 1 < 0$

6) $-3x^2 + x - 7 < 0$

On utilisera les formules de résolution d'une équation du second degré pour 1), 2) et 3). Puis la règle du signe d'un trinôme pour 4), 5), 6).

Exercice 24. Mathématiques pour les sciences physiques
Soit l'équation $y^2 + \beta y + \dfrac{2k}{m} = 0$ avec β, k et m grandeurs constantes positives et y inconnue réelle.

1) Établir la condition sur β, k et m pour que le discriminant Δ de l'équation soit positif.

2) Établir l'expression des solutions y en fonction de β, k et m dans le cas d'un discriminant positif.

Exercice 25 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$,

2) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$,

3) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$,

4) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

Corrigé 1) Posons (E) l'équation $e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $X = \mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow X^2 - 4X + 4 = 0 = 0\\ &\Leftrightarrow (X-2)^2 = 0\\ &\Leftrightarrow X = 2\\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 2\\ &\Leftrightarrow x = \ln(2).\end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (E) \text{ est } \{\ln(2)\}}$.

Exercice 26. Mathématiques pour les sciences physiques

Une position d'équilibre x_e vérifie la relation suivante:

$$-mg\sin(\alpha) + k\left(\frac{x_0}{x_e}\right)^n = 0 \qquad \text{où } \alpha \text{ est un angle tel que } \sin(\alpha) = \frac{h}{L}\ .$$

Établir l'expression de x_e en fonction des autres grandeurs caractéristiques h, L, m, g, k ,n et x_0 qui sont tous des réels strictement positifs.

On utilisera que pour x, a réels strictement positifs et n entier naturel: $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$

Exercice 27 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations:

1) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{5}{2}$

2) $\dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{x}{4} + \dfrac{x-1}{3}$

3) $\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{3}$

Corrigé 1) Posons (E) l'équation $\dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{5}{2}$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^*$ pour ne pas annuler le dénominateur)

$(E) \Leftrightarrow$ "*réarranger l'équation pour se ramener à une équation du second degré...*"

Exercice 28 Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes:

1) $\dfrac{3}{x-2} \leqslant 4$

2) $\dfrac{x+2}{3-x} \leqslant 1$

3) $x^2 + 2 \geqslant 5x - 4$

4) $x^2 - 2 \geqslant 2x - 5$

5) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 8) \geqslant 0$

6) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 6x + 8) \leqslant 0$

7) $\dfrac{1}{x-5} + \dfrac{1}{x-2} \leqslant \dfrac{3}{10}$

8) $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{x+2}{x+3}$.

9) $\dfrac{2x^2 - 10x + 10}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 1$

Indication: pour toutes les inéquations se ramener à $f(x) \leqslant 0$ (ou $\geqslant 0$, < 0, > 0) pour étudier le signe grâce éventuellement à un tableau de signes ou la règle du signe d'un trinôme.

Exercice 29. **PCSI - Facultatif - MPSI - Obligatoire**

1) Montrer que pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

2) En déduire que pour tous x, y, z réels strictement positifs de somme s,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant 6 - s.$$

Exercice 30. **PCSI - Facultatif - MPSI - Obligatoire**

1) Montrer que pour tous x, y réels positifs, $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.

2) En déduire que pour tous x, y réels strictement positifs, $\dfrac{x}{x^4+y^2} \leqslant \dfrac{1}{2xy}$.

3) En déduire que pour tous x, y réels strictement positifs, $\dfrac{x}{x^4+y^2} + \dfrac{y}{x^2+y^4} \leqslant \dfrac{1}{xy}$.

Rappels de cours - Valeur absolue .
Soient x et y deux réels et d un réel positif.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$|x| = d \Leftrightarrow x = d \text{ ou } x = -d \qquad |x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$

$$|x| \leqslant d \Leftrightarrow -d \leqslant x \leqslant d \qquad |x| \geqslant d \Leftrightarrow x \leqslant -d \text{ ou } x \geqslant d.$$

$$|x|^2 = x^2$$

Exercice 31 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes:

1) $|2x-1| = 3$
2) $|2x-1| = |4-x|$
3) $|x-2| \leqslant 5$
4) $|3x-1| \geqslant 4$
5) $|3-2x| < 6$
6) $|x^2+2x-3| \leqslant 5$

Corrigé 1) Posons (E) l'équation $|2x-1| = 3$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow 2x-1 = 3 \quad \text{ou} \quad 2x-1 = -3 \\ &\Leftrightarrow 2x = 4 \quad \text{ou} \quad 2x = -2 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -1. \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'ensemble-solution de } (E) \text{ est } \{2, -1\}}$.

Rappels de cours - Élévation au carré.
Soient a et b deux réels **de même signe**:

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

Soient a et b deux réels **positifs**:

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2.$$

Exercice 32. **Pour la MPSI**
Résoudre les équations suivantes d'inconnue x.

1) $|x+5| = x$
2) $|2x-10| - |x+3| = |3x+1|$
3) $\sqrt{x+1} = x$.
4) $\sqrt{x+1} \leqslant x-2$
5) $\sqrt{x+1} \leqslant 2-x$
6) $|3x-5| \leqslant |2x+3|$

Indication: le rappel ci-dessus sur l'élévation au carré est utile pour 3),4),5),6)

Rappels de cours - Nombres complexes.
Soient a et b deux réels, posons $z = a + \mathrm{i}\, b$ (forme algébrique de z) où i est le nombre imaginaire vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

Partie réelle de z : $\mathrm{Re}(z) = a$ **Partie imaginaire** de z: $\mathrm{Im}(z) = b$

Conjugué de z : $\overline{z} = a - \mathrm{i}\, b$

Module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $|z|^2 = z\overline{z} = (a + \mathrm{i}\, b)(a - \mathrm{i}\, b) = a^2 + b^2$

Un argument de z est un réel θ tel que: $z = |z|(\cos(\theta) + \mathrm{i} \sin(\theta))$ (**forme trigonométrique** de z).

Notation exponentielle: $z = |z|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Pour θ et θ' réels $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}$.

Exercice 33 Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants:

1) $a = (3 - \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})$
2) $b = (5 + 2\,\mathrm{i})^2$
3) $c = \dfrac{2}{1 + \mathrm{i}}$
4) $d = \dfrac{1 - 3\,\mathrm{i}}{2 + 4\,\mathrm{i}}$
5) $e = \dfrac{2\,\mathrm{i}}{3 - \mathrm{i}}$
6) $f = \dfrac{1}{1 + \mathrm{i}} + \dfrac{1}{1 - \mathrm{i}}$
7) $g = \dfrac{2}{2 - 3\,\mathrm{i}} + \dfrac{3}{1 - 4\,\mathrm{i}}$

Indication pour 3) → 7), pour "chasser" le i *du dénominateur il faut penser à multiplier le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur et penser à* $z\overline{z} = |z|^2$

Corrigé 3) On multiplie le dénominateur et le numérateur de c par $1 - \mathrm{i}$ le conjugué de $1 + \mathrm{i}$,

$$c = \frac{2}{1+\mathrm{i}} = \frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{2(1-\mathrm{i})}{1^2+1^2} = 1 - \mathrm{i}\,.$$

Exercice 34 Écrire avec la notation exponentielle les nombres complexes suivants:

1) $a = 1 + \mathrm{i}$
2) $b = 2$
3) $c = -4$
4) $d = 3\,\mathrm{i}$
5) $e = -\,\mathrm{i}$
6) $f = \sqrt{3} - \mathrm{i}$
7) $g = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

Corrigé 1) On calcule le module de a, $|a| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Puis on factorise a par son module et on reconnait θ via son sinus et son cosinus:

$$a = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}}\,.$$

Exercice 35 Mettre sous forme algébrique, placer sur le cercle trigonométrique et écrire sous forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$ les nombres suivants:

1) $a = \mathrm{e}^{0\,\mathrm{i}}$
2) $b = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}}$
3) $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$
4) $a = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi}$
5) $b = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{2}}$
6) $b = -\,\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\,\pi}{3}}$
7) $b = -\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$
8) $b = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{4}}$
9) $b = -\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{6}}$
10) $b = \mathrm{e}^{\frac{-3\,\mathrm{i}\,\pi}{4}}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\,\pi}{6}}$

Exercice 36. Mathématiques pour les sciences physiques - **Plus difficile**
Soit Z_{MN} un nombre complexe vérifiant $\dfrac{1}{Z_{MN}} = \dfrac{1}{r + \mathrm{i}\,L\omega} + \mathrm{i}\,C_0\omega$ où C_0, r, L et ω sont des réels positifs.
Déterminer C_0 en fonction de r, L et ω pour que Z_{MN} soit un réel.

Exercice 37 Sans se soucier du domaine de validité des calculs, calculer la dérivée des fonctions f définies par:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

2) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

3) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

4) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^5}$

5) $f(x) = \dfrac{1}{(3-4x)^2}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{(2-x)^4}$

7) $f(x) = \dfrac{1}{3x-1}$

8) $f(x) = \dfrac{1}{(5x+1)^4}$

Pour 1),...8) utiliser la dérivée de u^α *et pas celle de* $\dfrac{1}{u}$

9) $f(x) = (x-2)(x-1)$

10) $f(x) = (x+1)^2(3x+2)^3$

11) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+3}$

12) $f(x) = \dfrac{x}{(x+4)^2}$

13) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x-3)^2}$

14) $f(x) = \sqrt{x-2}$

15) $f(x) = \sqrt{3x^2+2x-4}$

16) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

17) $f(x) = \cos(3x)$

18) $f(x) = \sin(2x)\cos(5x)$

19) $f(x) = \sin^2(x)\cos^3(2x)$

20) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

21) $f(x) = \ln(3x-2)$

22) $f(x) = \ln(2x^2+1)$

23) $f(x) = \ln(\ln(x))$

24) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

25) $f(x) = \mathrm{e}^{3x}$

26) $f(x) = \mathrm{e}^{2x^2+x-1}$

27) $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^x$

28) $f(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}$

29) $f(x) = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$

30) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}$

Question supplémentaire pour MPSI: déterminer l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions ci-dessus

Exercice 38. Mathématiques pour les sciences physiques
Soit x une variable réelle strictement positive que $x > 0$ et k, x_0, x_e, n sont des grandeurs réelles constantes et n est un entier naturel. On considère la fonction:

$$E_p(x) = k\left(\frac{x_0}{x_e}\right)^n x - k\frac{x_0^n}{1-n}\frac{1}{x^{n-1}}.$$

Établir les expressions de ses dérivées première et seconde.

Exercice 39 Sans se soucier du domaine de validité des calculs, déterminer une primitive des fonctions f suivantes définies par:

1) $f(x) = 4x^3 - x^2 + 5x + 3$

2) $f(x) = 2(x-2)^2$

3) $f(x) = (2x-1)(x-4)$

4) $f(x) = 3x(x^2-2)^2$

5) $f(x) = 3x(x^2-2)^{20}$

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

7) $f(x) = \dfrac{5}{x^4}$

8) $f(x) = \dfrac{3}{(2+x)^2}$

9) $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)^3}$

10) $f(x) = \dfrac{1}{(1-2x)^4}$

11) $f(x) = \dfrac{4x}{(x^2+2)^3}$

12) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

13) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

14) $f(x) = \dfrac{1}{4-3x}$

15) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

16) $f(x) = \dfrac{4x-6}{x^2-3x+1}$

17) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

18) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

19) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

20) $f(x) = \sqrt{x}$

21) $f(x) = \sqrt{5x+1}$

22) $f(x) = 3x^2\sqrt{2x^3+5}$

23) $f(x) = 3e^x\sqrt{4e^x+1}$

24) $f(x) = \cos(3x)$

25) $f(x) = \sin(2x)$

26) $f(x) = \mathrm{e}^x\sin(\mathrm{e}^x)$

27) $f(x) = \cos(3x)\,\mathrm{e}^{\sin(3x)}$

Rappel de cours - Raisonnement par récurrence simple .
Soit $\mathcal{P}$ une proposition portant sur les entiers naturels.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, on suppose que:

- **Initialisation:** $\mathcal{P}(n_0)$ est vérifiée.
- **Hérédité:** pour tout entier $n \geqslant n_0$ si $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout entier $n \geqslant n_0$.

En pratique*: la propriété $\mathcal{P}$ doit être posée. L'exemple détaillé dans l'exercice suivant est* **un modèle à respecter**.

Pour $a_1, a_2, \cdots, a_n$ des réels, on note $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Exercice 40 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Corrigé On effectue une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$ et $\dfrac{1 \times (1+1)}{2} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

Hérédité: soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée (c'est l'hypothèse de récurrence).

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$

D'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée ce qui achève la récurrence.

Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 41 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Respecter le modèle de rédaction de l'exemple détaillé ci-dessus

Exercice 42 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 43 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.