BACCALAURÉAT BLANC

Février 2009 – Lycée Corneille

Série S

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Coefficient 9

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.

Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- Parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité ;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

F l'événement « le jouet est sans défaut de finition » ;

S l'événement « le jouet réussit le test de solidité ».

1) a) Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

b) Démontrer que $p_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right)=\frac{1}{4}$.

c) Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2) a) Démontrer que $p\left(S\right)=0{,}934$.

b) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition (*on donnera le résultat arrondi au millième*).

3) Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 €, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 €.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire B.

EXERCICE 2 (6 points)

Commun à tous les candidats

Partie A : questions de cours

Soit (E) l'équation différentielle $y' = ay$.

Prérequis : on sait que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=e^{ax}$ est solution de (E) et qu'elle ne s'annule pas.

On se propose de démontrer que toute solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est de la forme $x\mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle.

1) On considère une fonction g solution de l'équation différentielle (E). Démontrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h\left(x\right)=\frac{g\left(x\right)}{e^{ax}}$ est constante.

2) Conclure.

Partie B

1) On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t, est notée $g(t)$. On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années. L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus. Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle [0 ; +∞[, de l'équation différentielle

$$(E_1) \quad y' = \frac{y}{4}$$

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1).

b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est- à-dire $g(0) = 1$.

2) En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre des rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u, ainsi définie, satisfait aux conditions :

$$(E_2) \quad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{4}u(t) - \frac{1}{12}\left(u(t)\right)^2 & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

a) On suppose que, pour tout réel positif t, on a $u(t) > 0$. On considère, sur l'intervalle [0 ; +∞[, la fonction h définie par $h = \frac{1}{u}$.

Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si et seulement si la fonction h satisfait aux conditions (E_3) :

$$(E_3) \quad \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} & \text{pour tout nombre réel } t \text{ positif ou nul} \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

où h' désigne la fonction dérivée de la fonction h.

b) Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h, puis celle de la fonction u.

c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers +∞ ?

EXERCICE 3 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Prérequis : on rappelle que si l'entier a est premier avec b, alors il est premier avec b^3.

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.

1) On suppose dans cette question que $\frac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

a) Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1129$.

b) Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple (x ; y) d'entiers relatifs vérifiant l'équation $14x + 39y = 1$.

Vérifier que le couple (−25 ; 9) est aussi solution de cette équation.

c) En déduire un couple $(u_0 ; v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1129$.

Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples (u ; v) d'entiers relatifs qui la vérifient.

d) Déterminer, parmi les couples (u ; v) précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2) a) Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.

En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b) Soit $\frac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x : $78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.

Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78. ***(Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte.)***

c) En déduire le *nombre* de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

EXERCICE 4 **(5 points)**

Commun à tous les candidats

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2+2i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2$, ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que $OH < OK$. On note z_H et z_K les affixes respectives des points H et K.

a) Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.

b) Calculer la longueur OA. En déduire les longueurs OK et OH.

c) Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que :

$$z_K = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } z_H = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-4}{z}$.

2) a) Déterminer et placer les points images de B et C par f.

b) On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f.

3) a) Montrer que pour tout point M distinct de O, on a :

$OM \times OM' = 4$

b) Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.

4) Soient K' et H' les images respectives de K et H par f.

a) Calculer OK' et OH'.

b) Démontrer que $z_{K'} = \left(2\sqrt{2}-2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = \left(2\sqrt{2}+2\right)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

c) Expliquer comment construire les points K' et H' en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H. Réaliser la construction.